

**Prof. Dr. Alfred Toth**

## **Die Zahlen als "freie Schöpfung des menschlichen Geistes"**

1. Wir wollen von der folgenden bekannten Passage aus einem mathematischen Klassiker ausgehen: "Wenn man bei der Betrachtung eines einfach unendlichen, durch eine Abbildung  $\varphi$  geordneten Systems  $N$  von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht, lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur die Beziehungen auffaßt, in die sie durch die ordnende Abbildung  $\varphi$  zueinander gesetzt sind, so heißen diese Elemente natürliche Zahlen oder Ordinalzahlen oder auch schlechthin Zahlen, und das Grundelement 1 heißt die Grundzahl der Zahlenreihe  $N$ . In Rücksicht auf diese Befreiung der Elemente von jedem anderen Inhalt (Abstraktion) kann man die Zahlen mit Recht eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes nennen" (Dedekind 1969, S. 17).

2. Die Zahl wird hier, ganz im Sinne Hegels, als Reduktion der Qualitäten eines Objektes bis auf die eine Qualität der Quantität definiert. Wie wir allerdings bereits in Toth (2015a) gezeigt haben, widerspricht dieses Verfahren der 2-wertigen aristotelischen Logik.

2.1. Die Identität zweier Objekte  $A$  und  $B$  (vgl. Dedekind 1969, S. 1) ist undefinierbar, weil es unmöglich ist, alle Eigenschaften eines Objektes zu bestimmen und da es ausgeschlossen ist, daß zwei Objekte  $A$  und  $B$  genau die gleichen Eigenschaften haben. Ontische Identität kann daher nur Selbstidentität betreffen, diese ist aber im Unterschied zu Gleichheit eine Relation eines und nicht von zwei Objekten.

2.2. Da bei Zeichen in der Logik zwischen Form und Inhalt unterschieden wird, kann die Identität zweier Zeichen  $a$  und  $b$  zwei verschiedene Dinge bedeuten.

2.2.1. Identität der Form. Offenbar ist  $a \neq b$ .

2.2.2. Identität des Inhalts. Der Inhalt eines Zeichens ist seine Relation zu seinem Referenzobjekt. Diese Relation ist aber qualitativ, da das von einem Zeichen bezeichnete Objekt eine Qualität besitzt. Qualitäten sollen aber

vermöge der oben zitierten Definition der Zahl durch Dedekind gerade ausgeschlossen werden.

Daraus folgt also, daß Zahlen weder durch Objekt- noch durch Zeichenidentität, und damit durch überhaupt keine Form von Identität definiert werden können.

3. Die quantitative Zahl ist semiotisch gesehen, da sie als nicht-qualitativ definiert wird, ein bloßer Mittelbezug und damit kein Zeichen. Insofern ist die Zahl zwar tatsächlich eine "freie Schöpfung des menschlichen Geistes", aber dies gilt ebenso für jeden auf eine Wandtafel gemalten Krixkrax. Daß die auf dem Zahlbegriff und den von ihm abgeleiteten Begriffen der Menge und der Kategorien definierte Mathematik sich überhaupt von einer Kritzelsequenz unterscheidet, liegt daher nicht daran, daß Objekten alle ihre Qualitäten abgeschrieben werden, sondern auf konventionelle Weise bestimmten Mittelbezügen gewisse Eigenschaften ZUGESCHRIEBEN werden. Dazu gehören bereits die arithmetischen Operationen. Rein mathematisch gesehen kann nämlich ohne Objektreferenz, und das heißt mit reinen Quantitäten, nicht bewiesen werden, daß  $1 + 1 = 2$  ist. Bei solchen angeblichen Zahlengleichungen handelt es sich in Wahrheit um Anzahlgleichungen, d.h. man stellt sich z.B. Äpfel als Referenzobjekte vor und interpretiert die Operation "+" als ontische Juxtaposition: Wenn ich einen Apfel neben einen anderen Apfel stelle, dann stehen vor mir zwei Äpfel. So erweisen sich ausgerechnet die natürlichen Zahlen, von denen Kronecker sagte, sie seien von Gott geschaffen und von denen Dedekind sagt, sie seien Schöpfungen des Menschen, als nicht-originäre Kreationen. Originär sind allerdings zum Beispiel die komplexen und hyperkomplexen Zahlen, denn die Vorstellung einer Radizierung aus einer negativen Zahl hat keine Entsprechung in einer qualitativen Mathematik der Anzahlen. WAS DEN ZAHLBEGRIFF DAHER IN WAHRHEIT UNIVERSELL ANWENDBAR MACHT, IST NICHT DIE SUBTRAKTION VON QUALITÄTEN VON OBJEKTEN, DIE ÜBER LOGISCHE IDENTITÄT DEFINIERT WERDEN, SONDERN DIE ZUSCHREIBUNG VON KONVENTIONELL FESTGESETZTEN EIGENSCHAFTEN, DIE ÜBER SEMIOTISCHE GLEICHHEIT DEFINIERT WERDEN. Relativ zu einer Anzahl, die, als Ergebnis eines Abzählungsprozesses, stets ein Referenzobjekt und damit eine Qualität voraussetzt, setzt eine Zahl also eine reduzierte semiotische Relation der Form  $(M \rightarrow O) \rightarrow M$ , d.h. den Verlust der Bezeich-

nungsfunktion voraus und nicht denjenigen einer Objekteigenschaft. Man sehe sich nochmals die von uns bereits in Toth (2015b) diskutierte semiotische Zahlentypologie an

Zahl := (M)

∩

Anzahl:= (M → (M → O))

∩

Nummer: = (M → ((M → O) → (M → O → I)))

Nummern haben sowohl Bezeichnungs- als auch Bedeutungsfunktion, Anzahlen haben lediglich Bezeichnungsfunktion, und Zahlen sind reine Mittelrelationen. In dieser qualitativ-inklusive Hierarchie tritt also von schrittweise ein Verlust semiotischer Funktionen ein, der nichts mit der Reduktion von ontischen Qualitäten zu tun hat.

#### Literatur

Dedekind, Richard, Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1911, Neuauflage 1969

Toth, Alfred, Die vollständige Bestimmung eines Dinges. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics 2015a

Toth, Alfred, Definition der Zahl aus der Nummer. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics 2015b

22.5.2015